Zur Trägerzahlstatistik in Folgen von Elektronenlawinen

Von Werner Legler

Institut für Angewandte Physik der Universität Hamburg

(Z. Naturforschg. **19 a**, 481—483 [1964]; eingegangen am 21. Dezember 1963)

The distribution function for the carrier numbers of series of electron avalanches is calculated. These series develop in gas discharges if the gap voltage approaches the breakdown potential. The calculation is valid for the case that the distribution function of the avalanches is given by $v(n) = (1/\bar{n}) \exp(-n/\bar{n})$. The influence of electron attachment on the derived formula is investigated.

Die Trägerzahl n von Elektronenlawinen unterliegt statistischen Schwankungen, die durch die Verteilungsfunktion

$$v(n) = (1/\bar{n}) \exp(-n/\bar{n}) \qquad (1)$$

beschrieben werden [1, 2]. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Mittelwert

$$\bar{n} = \exp \int \alpha \, \mathrm{d}x \qquad (2)$$

der Trägerzahl groß gegen eins ist (α = Ionisierungskoeffizient). Diese Verteilungsfunktion wurde durch experimentelle Untersuchungen bestätigt [3, 4].

Mißt man die Trägerzahlverteilung von Elektronenlawinen in der Nähe der Durchbruchspannung der Entladungsstrecke, so ist zu beachten, daß die einzelnen Lawinen von Folgelawinen begleitet sein können, die durch Sekundärprozesse an der Kathode ausgelöst werden. Diese Folgelawinen bilden zusammen mit der Primärlawine eine generationsartig gegliederte Kette. Im allgemeinen bedingt das angewandte Meßverfahren, daß in diesem Falle nicht mehr die Verteilung der Trägerzahlen einzelner Lawinen, sondern nur die der Lawinenketten registriert werden kann [5–7]. Zur Auswertung solcher Messungen ist es erforderlich, die Verteilung der gesamten Trägerzahl solcher Ketten zu kennen. In der vorliegenden Arbeit wird diese Verteilung unter der Voraussetzung berechnet, daß die Einzellawinen der Verteilung (1) unterliegen. Anschließend wird untersucht, wie das Ergebnis modifiziert wird, wenn die Bildung negativer Ionen durch Elektronenanlagerung berücksichtigt wird.

Berechnung der Verteilung

Zur Berechnung gehen wir von der Wahrscheinlichkeit einer Kette definierter Struktur aus und zeigen, daß Ketten mit gleicher Lawinenzahl, aber unterschiedlicher Verteilung der Lawinen auf die einzelnen Generationen, bis auf konstante Faktoren gleiche Häufigkeitsverteilungen der Gesamtträgerzahl besitzen. Diese Ketten werden zusammengefaßt und anschließend führt die Summation über alle möglichen Lawinenzahlen zur gesuchten Verteilungsfunktion der Gesamtträgerzahlen von Lawinenketten.

Die primäre Lawine bestehe aus m_0 Elektronen und habe k_1 Folgelawinen in der ersten Folgegeneration mit insgesamt m_1 Elektronen. Die zweite Folgegeneration soll von k_2 Lawinen mit m_2 Elektronen gebildet werden. Die Kette soll mit der r-ten Folgegeneration abgeschlossen werden, d. h. die dort laufenden m_r Elektronen dürfen keine Folgelawinen mehr auslösen. Die Struktur der Kette wird durch das folgende Schema dargestellt:

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
\text{Nr. der Generation} & 0 & & 1 & & 2 & & \ldots & & r & & r+1 \\
\text{Lawinenzahl} & k_0 \equiv 1 & & k_1 & & k_2 & & \ldots & & k_r & & k_{r+1} \equiv 0 \\
 & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
\text{Elektronenzahl} & m_0 & & m_1 & & m_2 & & \ldots & & m_r & &
\end{array}$$

Jeder Pfeil in diesem Schema bezeichnet einen Übergang. Für diese Übergänge gelten folgende Wahrscheinlichkeiten:

$v(k, m)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß k Lawinen aus insgesamt m Elektronen bestehen (Senkrechte Pfeile).

Aus (1) folgt durch k-fache Faltung

$$v(k, m) = \frac{(m/\bar{n})^{k-1}}{\bar{n}(k-1)!} \exp(-m/\bar{n}). \qquad (3)$$

$p(m, k)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Lawinengruppe von m Elektronen an der Kathode k Folgelawinen auslöst (Schräge Pfeile). Wird pro Lawinenelektron mit der Wahrscheinlichkeit γ eine

[1] R. A. Wijsman, Phys. Rev. **75**, 833 [1949].
[2] W. Legler, Z. Phys. **140**, 221 [1955].
[3] L. Frommhold, Z. Phys. **144**, 396 [1956].
[4] H. Schlumbohm, Z. Angew. Phys. **11**, 156 [1959].
[5] S. Kojima u. K. Kato, J. Phys. Soc., Japan **11**, 322 [1956].
[6] L. Frommhold, Z. Phys. **150**, 172 [1958].
[7] H. Schlumbohm, Z. Phys. **151**, 563 [1958].

Folgelawine erzeugt, so ist wegen $\gamma \ll 1$ die Größe k einer POISSON-Verteilung unterworfen.

$$p(m,k) = \frac{(\gamma\, m)^k}{k!}\exp(-\gamma\, m)$$
$$= \frac{\mu^k}{k!}(m/\bar{n})^k \exp(-\mu\, m/\bar{n}). \tag{4}$$

Dabei wurde der Rückwirkungskoeffizient $\mu = \gamma\, \bar{n}$ eingeführt. Ist $\mu = 1$, so bedeutet dies, daß im Mittel jede Lawine gerade eine Folgelawine auslöst (Selbständigkeitsbedingung der TOWNSEND-Entladung).

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Kette von der im obigen Schema angegebenen Struktur ergibt sich aus dem Produkt der zu den einzelnen Pfeilen gehörenden Übergangswahrscheinlichkeiten.

$$W(m_0, m_1, \ldots, m_r \mid 1, k_1, \ldots, k_r, 0)$$
$$= \prod_{\nu=0}^{r} v(k_\nu, m_\nu)\cdot p(m_\nu, k_{\nu+1}). \tag{5}$$

Setzt man die durch (3) und (4) gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten ein und führt durch

$$N = \sum_{\nu=0}^{r} m_\nu\,, \qquad s = \sum_{\nu=1}^{r} k_\nu \qquad (6), (7)$$

die Gesamtelektronenzahl N der Kette und ihre Gesamtzahl s der Folgelawinen ein, so erhält man

$$W(m_0, m_1, \ldots, m_r \mid 1, k_1, \ldots, k_r, 0)$$
$$= \mu^s \exp[-(1+\mu)\, N/\bar{n}] \prod_{\nu=0}^{r} \frac{(m_\nu/\bar{n})^{k_\nu + k_{\nu+1} - 1}}{\bar{n}\,(k_\nu - 1)!\; k_{\nu+1}!}\,. \tag{8}$$

Es werden nun alle Ketten mit gleicher Gesamtelektronenzahl N und der Lawinengruppierung $1, k_1, \ldots, k_r, 0$ zusammengefaßt. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer solchen Kette ergibt sich aus (8) durch r-fache Integration über die m_ν unter Beachtung der Bedingungen (6) und $m_\nu > 0$ zu

$$W(N \mid 1, k_1, \ldots, k_r, 0) = \frac{1}{n}[\mu (N/\bar{n})^2]^s$$
$$\cdot f(1, k_1, \ldots, k_r, 0) \exp[-(1+\mu)\, N/\bar{n}] \tag{9}$$

mit $$f(1, k_1, \ldots, k_r, 0) = \frac{1}{(2\,s)!}\prod_{\nu=0}^{r}\frac{(k_\nu + k_{\nu+1} - 1)}{(k_\nu - 1)!\; k_{\nu+1}!}\,. \tag{10}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß Ketten mit gleicher Zahl s von Folgelawinen trotz unterschiedlicher Verteilung der Lawinen auf die einzelnen Generationen gleiche Verteilungsfunktionen für die Gesamtträgerzahl N besitzen, wenn man von dem Faktor $f(1, k_1, \ldots, k_r, 0)$ absieht, der weder die Variable N, noch die Parameter $\bar{n}$ und μ der Verteilungsfunktion enthält.

Sieht man jetzt von der individuellen Verteilung der Folgelawinen auf die einzelnen Generationen ab, so folgt für die Wahrscheinlichkeit $W(N \mid s)$ für das Auftreten einer Kette mit s Folgelawinen und N Elektronen

$$W(N \mid s) = \frac{1}{n}[\mu (N/\bar{n})^2]^s F(s) \exp[-(1+\mu)\, N/\bar{n}] \tag{11}$$

mit $$F(s) = \sum f(1, k_1, \ldots, k_r, 0)\,. \tag{12}$$

Dabei ist die Summation in (12) über alle möglichen Anordnungen von natürlichen Zahlen k_ν zu erstrecken, welche die Bedingung (7) erfüllen. Dabei durchläuft r alle Zahlen von 1 bis s, wenn $s \geqq 1$ ist. Für $s = 0$ existiert nur $f(1,0) = 1$ und damit wird auch $F(0) = 1$. Die Bestimmung von $F(s)$ soll hier nicht durch explizite Ausführung der Berechnungsvorschrift (12) in Verbindung mit (10) durchgeführt werden. Wie im Anhang auf einem anderen Weg gezeigt wird, ist

$$F(s) = \frac{1}{s!\,(s+1)!}\,. \tag{13}$$

Die gesuchte Verteilungsfunktion $\varphi(N)$ der Gesamtträgerzahl einer Lawinenkette erhält man durch Summation der $W(N \mid s)$ über alle s.

$$\varphi(N) = \frac{1}{\bar{n}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{\mu}\, N/\bar{n})^{2s}}{s!\,(s+1)!}\exp[-(1+\mu)\, N/\bar{n}]\,. \tag{14}$$

Einführung der BESSEL-Funktion erster Ordnung liefert

$$\varphi(N) = \frac{1}{\bar{n}}\,\frac{J_1(i\,2\sqrt{\mu}\,N/\bar{n})}{i\sqrt{\mu}\,N/\bar{n}}\exp[-(1+\mu)\, N/\bar{n}]\,. \tag{15}$$

Diese Verteilungsfunktion ist für verschiedene Werte des Rückwirkungskoeffizienten μ in Abb. 1 dar-

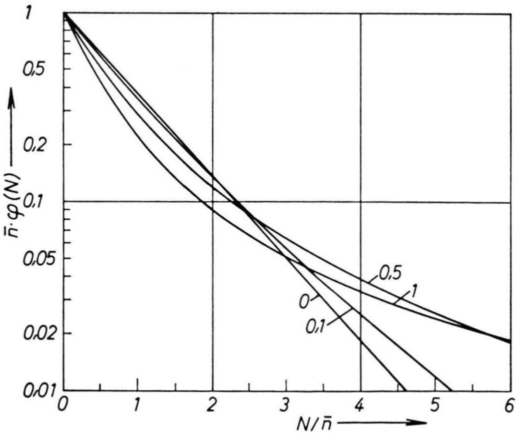

Abb. 1. Verteilungsfunktion der Trägerzahlen N in Folgen von Elektronenlawinen mit dem Rückwirkungskoeffizienten μ als Kurvenparameter. $\mu = 0$: Verteilung für Einzellawinen.

gestellt. Für $\mu > 0$ ergeben sich in halblogarithmischer Darstellung durchhängende Kurven. Diese charakteristische Abweichung von der Geraden des Falles $\mu = 0$ ist bereits bei $\mu > 0{,}1$ deutlich zu bemerken. Für den näheren Vergleich dieser Kurven mit experimentell bestimmten Verteilungen sei auf die Arbeiten von FROMMHOLD[6] und SCHLUMBOHM[7] verwiesen.

Berechnet man Mittelwert und Streuung dieser Verteilungsfunktion, so erhält man

$$\bar{N} = \int_0^\infty N\,\varphi(N)\,\mathrm{d}N = \frac{\bar{n}}{1-\mu}, \tag{16}$$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (N - \bar{N})^2\,\varphi(N)\,\mathrm{d}N = \bar{n}^2\,\frac{1+\mu}{(1-\mu)^2}. \tag{17}$$

Hieraus ist zu entnehmen, daß nicht nur Mittelwert und Streuung über alle Grenzen wachsen, wenn μ gegen 1 strebt, sondern auch die relative Streuung

$$\sigma/\bar{N} = \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \tag{18}$$

wächst noch über alle Grenzen. Dies bedeutet, daß die statistischen Schwankungserscheinungen eine um so stärkere Rolle spielen, je mehr sich die Spannung an der Entladungsstrecke der Zündspannung nähert.

Einfluß der Elektronenanlagerung

In elektronegativen Gasen können Elektronen durch Anlagerung als negative Ionen gebunden werden. Dieser Vorgang wird durch den Anlagerungskoeffizienten η beschrieben. Im Gegensatz zum Fall der fehlenden Anlagerung muß jetzt bei der Angabe der Trägerzahl einer Lawine zwischen Elektronenzahl und Zahl der positiven Ionen unterschieden werden. Wie früher gezeigt wurde[7], wird dann die Verteilung der Trägerzahlen nicht mehr ohne weiteres durch die Funktion (1) beschrieben. Unter der Voraussetzung, daß $\exp[(\alpha-\eta)d] \gg 1$ ist, erzeugt der Bruchteil η/α der primär an der Kathode ausgelösten Elektronen keine Elektronenlawinen, d. h. an der Anode kommen nur wenige negative Ionen an. Der verbleibende Anteil $(1-\eta/\alpha)$ der Primärelektronen erzeugt Lawinen, deren Trägerzahlen gemäß der Funktion (1) verteilt sind, wobei jedoch für $\bar{n}$ andere Werte einzusetzen sind. Für die Elektronenzahlen ist dies die Größe

$$\bar{n}^* = \frac{\exp[(\alpha-\eta)\,d]}{1-\eta/\alpha} \tag{19}$$

und für die Zahl der positiven Ionen

$$\bar{p}^* = \frac{\exp[(\alpha-\eta)\,d]}{(1-\eta/\alpha)^2}. \tag{20}$$

Mit diesen Modifikationen gilt die in (14) bzw. (15) angegebene Verteilung auch für den Fall der Elektronenanlagerung.

Anhang

Zur Berechnung von $F(s)$ wird die Tatsache benutzt, daß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Kette mit beliebiger Zahl von Elektronen N und Folgelawinen s (einschließlich $s = 0$) gleich eins ist.

$$1 = \sum_{s=0}^{\infty} \int_{N=0}^{\infty} W(N \mid s)\,\mathrm{d}N. \tag{21}$$

Setzt man hier $W(N \mid s)$ nach Gl. (11) ein, so ergibt sich nach Ausführung der Integration und anschließender Multiplikation der Gleichung mit $(1+\mu)$ die Beziehung

$$1+\mu = \sum_{s=0}^{\infty} (2\,s)!\,F(s)\left(\frac{\mu}{(1+\mu)^2}\right)^2. \tag{22}$$

Dies muß für $0 \leqq \mu \leqq 1$ gelten. Dort gilt auch die Identität

$$1+\mu \equiv \frac{(1+\mu)^2}{2\,\mu}\left(1 - \sqrt{1-4\,\frac{\mu}{(1+\mu)^2}}\right). \tag{23}$$

Reihenentwicklung der Wurzel nach $\mu/(1+\mu)^2$ und Koeffizientenvergleich zwischen (22) und (23) liefert das Ergebnis

$$F(s) = \frac{1}{s!\,(s+1)!}. \tag{24}$$